# DG法的一般原理和稳定性（Chi-Wang Shu）

Shu Chi-Wang对DG法做了详细的解释和分析，并介绍了应用DG法求解各种低阶和高阶PDE的算法。总结如下：

## 1 DGFEM综述(Shu,; Cockburn,)

Discontinuous Galerki (DG)法是一类使用完备的不连续基函数的有限单元法，基函数通常选为分段多项式。因为基函数可以是完备不连续的，DG法具有连续有限单元法不具备的灵活性，比如允许有悬挂节点的任意三角网格、自由改变每个单元内的多项式阶数，与周围相邻单元的无关（*p*自适应性）、局部性数据结构（单元仅与其紧密相邻单元通信，与格式的精度（阶）无关）以及非常高的并行效率（通常在固定网格上可达99%，在动态荷载均衡的自适应网格上可达80%）(Biswas et al., 1994)。*h-p*自适应、并行动态荷载均衡和高效求解特性的DG法模拟Rayleigh-Taylor流动不稳定性的研究参考（Remacle et al., 2003）。

DG法首次在1973年由Reed and Hill引入中子输移方程的求解，是一个时间无关的线性双曲型方程。DG法的主要发展由Cockburn et al.完成[10,12,13,14,15]，建立可求解非线性、时间相关问题，诸如可压缩欧拉方程，使用显格式、非线性稳定高阶Runge-Kutta时间离散[44]和具有精确或近似的界面通量的黎曼求解器的DG空间离散以及总方差限制(total variation bounded, TVB)的非线性限制器，实现了强激波的非振荡数值特性。

DG法已应用于包括电磁动力学、气体动力学、颗粒流、磁流体力学、浅水方程、物理海洋、油气存储、半导体设备、空隙介质污染物输移、水轮机、紊流、粘弹性流、天气预报等各研究领域，具体细节可参考综述性文献[8,11,17,18,19]。

## 2 时间离散

重点介绍Method of lines DG法，即不离散时间变量。下面简要介绍时间离散格式。

双曲型问题或对流占优问题，诸如高Reynolds数Navier-Stokes方程，通常使用一类高阶非线性稳定的Runge-Kutta时间离散格式。

For high-order time discretizations, we can use a strong stability preserving (SSP) Runge–Kutta or multistep method (Gottlieb et al., 2009), which is a [convex combination](https://www.sciencedirect.com/topics/computer-science/convex-combination) of several formal forward Euler steps. For example, let denote a semi-discrete scheme with high-order spatial discretizations by a finite volume or DG method, then the third order SSP Runge-Kutta method is given by,

 (1)

If the forward Euler is bound-preserving, then so are the high-order SSP methods due to the convex combinations. Early works using SSP methods to construct high-order bound-preserving schemes include Perthame and Shu (1996).

To render a high-order finite volume or DG scheme bound-preserving, we should use a SSP time discretizations such as (1) and a monotone flux . Then in each time stage in a Runge–Kutta method or each time step of a multistep method, we should use the simple limiter.

此类格式是高阶的或低存储量的。具体细节可参考调查性文献[43]和综述性文献[21]。

如果PDE包含高阶的空间导数，且系数值很小，则显格式的时间推进方法，如Runge-Kutta法将导致时间步长受到严格限制。如何建立此类方程求解的高效时间离散格式，并且仍然保持DG法的优势，如局部特性和并行效率，是一个值得深入研究的课题[46]。

## 3 DG法求解守恒方程

DG法是求解双曲型守恒方程的有效数值方法，可以有不连续性近似解。下面讨论DG法求解双曲型守恒方程的算法公式、稳定性分析和误差评估。

3.1 2D恒定态线性方程

首先介绍原始的DG法求解2D恒定态线性对流方程：

 （3.1）

式中，*a*和*b*为常数。假设*a*>0，*b*>0。

当施加以下入流边界条件后，式（3.1）是well-posed问题。

 （3.2）

假设使用矩形网格覆盖计算域，包含以下单元（）：



其中，



上式坐标为在[0,1]的*x, y*轴上的离散点。

还可以标记：



以及



假设网格是规则的，即存在常数*c*>0，与*h*无关，因此：



再定义有限单元空间由下列分段多项式组成：

 （3.3）

式中，表示在单元上定义的直到*k*阶的多项式集合。注意在空间内的函数可能在穿过单元界面处是不连续的。

求解式（3.1）的DG法定义如下：对所有试函数和所有，找到唯一的函数满足：

 （3.4）

这里，是数值通量，是定义在单元界面处的单值函数，与界面两侧的数值解*uh*有关，因为界面处的*uh*是不连续的。对于简单的线性对流PDE（3.1），可选择迎风格式的数值通量格式：



注意到，对于边界单元*i*=1，左侧边的数值通量使用给定的边界条件计算：



类似地，对于边界单元*j*=1，底部边的数值通量使用给定的边界条件计算：



现在考察格式（3.4）的实施。如果选择的一个局部基函数，表示为（），数值解可表述为：



需要求解系数：



根据格式（3.4），上式满足线性方程：

 （3.5）

式中，为矩阵，第个元素计算如下：



*RHS*向量的第*l*个元素计算如下：



依赖于在左侧单元和底部单元上的信息，如果他们是在计算域内，或者在边界条件上，如果一个或两个单元都在计算域以外。

显然，该方法没有涉及到大型方程组求解，容易实施。Lesaint and Raviart[25]证明当使用*k*阶多项式的分段张量积作为基函数时，该方法在*L*2范数上以最优精度（阶）为收敛。数值试验表明：当使用常用的*k*阶分段多项式时也可以达到最优收敛速度。

上述方法可在任意三角网格上设计和实施。的*L*2误差评估，其中*k*是多项式的阶，*h*为网格尺寸（数值解足够光滑时）。大多数情况下，最优误差界为，实际数值计算中，也可观察到最优精度可达。

但是，尽管方法（3.4）容易精确、有效地实施，但不能统一地用于线性方程组，其中特征线信息来自不同方向，或者对于非线性方程组，特征线方向与解本身有关。

3.2 1D时间相关守恒方程

当仅使用DG法离散空间变量时，可解决方法（3.4）不能用于线性和非线性方程组的问题，时间离散可采用显格式的Runge-Kutta方法（2.1）实现。该方法称为Runge-Kutta DG（RKDG）法[10,12,13,14,15]。

考察以下1D守恒方程：

 （3.7）

假设如下网格覆盖计算域[0,1]，由单元（）组成，其中：



标记：



假设网格是规则的，即存在常数*c*>0，与*h*无关，因此：



定义有限单元空间由分段多项式组成：

 （3.8）

其中，表示在单元*Ii*上定义的直到*k*阶的多项式集合。求解方程（3.7）的半离散式DG法定义如下：对所有试函数和所有，找到唯一函数满足：

 （3.9）

此处，为数值通量，是定义在单元界面处的单值函数，通常与界面两侧的数值解的值有关：



使用由有限差分格式和有限单元格式而来的单调性数值通量格式求解守恒方程组，满足如下条件：

（1）一致性：；

（2）连续性：对于变量和至少是Lipschitz连续的；

（3）单调性：对于其第1个变量是非递减函数，对于第2个变量是非递增函数，符号标记为。

单调性通量包括Lax-Friedrichs通量：



Godunov通量：



Engquist-Osher通量：



3.2.1 单元熵不等式和*L*2稳定性

式（3.7）的弱解形式可能不唯一，唯一和物理相关的弱解（称为熵解），对于满足的任意凸集的熵*U*(*n*)和对应的熵通量，满足如下分布意义上的熵不等式：

 （3.10）

# 间断Galerkin（DG）法原理Cangiani et al. (2017)

## DG法离散1阶双曲型PDE

Cangiani et al. (2017)给出了DG法原理的数学分析，总结如下：

考虑使用DG法离散下面的1阶输运方程，即找到满足：

 （2.4）

 （2.5）

其中，表示下列集合给出的图空间(graph space)：



在介绍DGFEM近似求解方程（2.4）和（2.5）之前，首先考虑基于使用弱形式施加边界条件的标准连续FEM离散方法。表示计算域的而规则形状分区，即由非重叠的*d*维单元组成的网格，因此。表示多项式的阶，引入有限单元空间：



式中，表示在单元上*p*阶多项式的空间。

标准的连续FEM就是找到，对所有的试函数满足：

 （2.6）

由式（2.6）定义的FEM在大梯度或不连续的解析解附近，由于数值振荡表现出数值计算不稳定的问题。并且，即使没有数值振荡的情况，相比逼近的速率（能力），FEM近似解的收敛速度也很慢。为解决这个问题，需要对式（2.6）引入适当的数值扩散，来增加数值格式的稳定性，例如流线扩散FEM（SUPG），其中在体积分中的试函数用代替，即当多项式阶数*p*固定时，，而统一化为*hp*配置时，。

DG FEM离散式（2.4）和（2.5）的基本思路是逐单元地(element-wise)应用格式（2.6），在各单元的入流边界上实施预设的边界条件。该方法提高了数值计算稳定性，但对于*d*维网格，引入了更多的自由度。

为表述DG FEM的简洁性，需要引入一些标记。对于，定义DGFEM空间：



对便于表述，这里仅考虑网格上均匀分布阶数的多项式，通用的*hp*版本稍后介绍。对于一个单元，表示单元的边界，的入流和出流部分分别定义为：



式中，表示在处对的外法向单位向量。

给定，在上一个函数的迹与相关。那么，几乎对每一个，存在唯一的单元，有。因此，在上的*v*的外侧或外迹与相关，并且可用与单元（可能不止一个）有关的内迹来定义，因此与的交接处有正数值的(*d*-1)维度。忽略下标字母后变量分别对应。

使用上述标记，由式（2.6），引入如下的局部FEM计算公式：对于每个，对所有的试函数，找到满足：

 （2.7）

其中，



对求和式（2.7），使用的定义，近似计算式（2.4）和（2.5）的DGFEM可定义为：对所有的试函数，找到满足：

 （2.8）

对式（2.8）的第1项分部积分，给出如下的等价计算公式：对所有的试函数，找到满足：

 （2.9）

与式（2.6）定义的FEM比较，改善计算稳定性的DGFEM计算式（2.9）具有一定优势。现在考虑恒定流速场**b**的分量，可观测到：当，对于所有有。因此，在DGFEM空间中引入额外的自由度确保了基函数的流线方向导数也存在于空间，与弱形式施加单元边界条件联合使用，提高了计算稳定性。

推导DGFEM式（2.9）的另一种方法是，更通用地应用于1阶非线性双曲型守恒方程的离散，使用广泛用于FVM中的数值通量的概念。该思路是考虑局部弱形式计算式（2.4）和（2.5），对其前几阶的项做分部积分。基于此方法，用一个光滑的试函数*v*乘以式（2.4），在一个单元上做积分：找到，满足以及

 （2.10）

DGFEM离散式（2.10）是基于用DGFEM近似解代替解析解*u*，用代替*v*，其中和属于空间。另外，因为在相邻单元间是不连续的，必须用数值通量函数代替通量，与在上的内迹和外迹以及对的外法向单位向量相关。在网格内的单元上求和，生成DGFEM算法：对所有的试函数，找到满足：

 （2.11）

需要注意，数值通量函数的选择与使用的有限单元空间是相互独立的。数值通量函数应满足2个关键特性：

（1）一致性：对每个，要求。

（2）守恒性：给定有限单元网格中的2个相邻单元和，在各点，注意到，有。

最常用的是经典的迎风数值通量格式，对有：

 （2.12）

将式（2.12）代入式（2.11），即获得式（2.9）中的DGFEM格式。

Remark: 假设**b**在内不会消失，可以用合适的“迎风”风格定义计算网格内的单元编号。这样，由式（2.11）导出的DGFEM矩阵为块上三角型，可使用块状向后迭代方法高效求解。另外，该方法无需构建全局DGFEM矩阵，即可以设计有效的*hp*版本的DGFEM。

# 参考文献

A. Cangiani et al., Chapter 2 Introduction to Discontinuous Galerkin Methods, @*hp-Version Discontinuous Galerkin Methods on Polygonal and Polyhedral Meshes*, SpringerBriefs in Mathematics, , Springer International Publishing AG 2017

Shu Chi-Wang. Discontinuous Galerkin Methods: General Approach and Stability.

R. Biswas, K.D. Devine and J. Flaherty, Parallel, adaptive finite element methods for conservation laws, Applied Numerical Mathematics, 14 (1994), 255-283.

J.-F. Remacle, J. Flaherty and M. Shephard, An adaptive discontinuous Galerkin technique with an orthogonal basis applied to Rayleigh-Taylor flow instabilities, SIAM Review, 45 (2003), 53-72.

B. Cockburn, S. Hou and C.-W. Shu, The Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws IV: the multidimensional case, Mathematics of Computation, 54 (1990), 545-581.

B. Cockburn, G. Karniadakis and C.-W. Shu, The development of discontinuous Galerkin methods, in Discontinuous Galerkin Methods: Theory, Computation and Applications, B. Cockburn, G. Karniadakis and C.-W. Shu, editors, Lecture Notes in Computational Science and Engineering, volume 11, Springer, 2000, Part I: Overview, 3-50.

B. Cockburn, S.-Y. Lin and C.-W. Shu, TVB Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws III: one dimensional systems, Journal of Computational Physics, 84 (1989), 90-113.

B. Cockburn and C.-W. Shu, TVB Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws II: general framework, Mathematics of Computation, 52 (1989), 411-435.

B. Cockburn and C.-W. Shu, The Runge-Kutta local projection P1-discontinuous-Galerkin finite element method for scalar conservation laws, Mathematical Modelling and Numerical Analysis (M2AN), 25 (1991), 337-361.

B. Cockburn and C.-W. Shu, The Runge-Kutta discontinuous Galerkin method for conservation laws V: multidimensional systems, Journal of Computational Physics, 141 (1998), 199-224.

B. Cockburn and C.-W. Shu, The local discontinuous Galerkin method for timedependent convection diffusion systems, SIAM Journal on Numerical Analysis, 35 (1998), 2440-2463.

B. Cockburn and C.-W. Shu, Runge-Kutta Discontinuous Galerkin methods for convection-dominated problems, Journal of Scientific Computing, 16 (2001), 173-261.

B. Cockburn and C.-W. Shu, Foreword for the special issue on discontinuous Galerkin method, Journal of Scientific Computing, 22-23 (2005), 1-3.

C. Dawson, Foreword for the special issue on discontinuous Galerkin method, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 195 (2006), 3183.

## 时间离散格式

S. Gottlieb and C.-W. Shu, Total variation diminishing Runge-Kutta schemes, Mathematics of Computation, 67 (1998), 73-85.

C.-W. Shu, A survey of strong stability preserving high order time discretizations, in Collected Lectures on the Preservation of Stability under Discretization, D. Estep and S. Tavener, editors, SIAM, 2002, 51-65.

S. Gottlieb, C.-W. Shu and E. Tadmor, Strong stability preserving high order time discretization methods, SIAM Review, 43 (2001), 89-112.

# 利普希兹条件

